1012　　座位号□□

电视大学 2000—2001 学年度第一学期“开放教育(本科)”期末考试

计算机科学与技术专业计算机数学基础(2)试题

2001 年 1 月

题　号	一	二	三	四	总　分
分　数					

评卷人

一、单项选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 设 $\pi=3.141592653\cdots$ 的近似值为(　　),它是有 4 位有效数字的近似值。

(A)3.14　　(B)3.141

(C)3.142　　(D)3.1416

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $x_0=1, x_1=2, x_2=3, x_3=4$ 处的函数值,那么用这四个互异节点作的拉格朗日插值多项式,其插值基函数 $l_2(x)=$(　　)

(A) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-2}$

(B) $\dfrac{(x-1)(x-3)(x-4)}{2}$

(C) $\dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)}{-6}$

(D) $\dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)}{6}$

3. 求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ 具有(　　)次代数精度。

(A)4　　(B)3

(C)1　　(D)2

4. 用二分法求方程 $f(x)=0$ 在区间$[a,b]$内的根，允许误差限是 ϵ，那么二分次数 $n\geq$ （　　）

(A)$\dfrac{\ln(b-a)-\ln\epsilon}{\ln 2}$　　(B)$\dfrac{\ln(b-a-\epsilon)}{\ln 2}-1$

(C)$\dfrac{\ln(b-a)-\ln\epsilon}{\ln 2}-1$　　(D)$\dfrac{\ln(b-a)-\ln\epsilon}{\ln 2}+1$

5. 解微分方程初值问题的四阶龙格—库塔法的截断误差是（　　）

(A)$O(h^6)$　　(B)$O(h^5)$

(C)$O(h^4)$　　(D)$O(h^3)$

得　分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

6. 用 3.1416 来表示 π 的近似值时，它的相对误差限是_____

_____。

7. 高斯顺序消去法解线性方程组能进行到底的条件是_____

_____。

8. 已知数据对(1,2),(2,3),(3,5)，用直线 $y=a_0+a_1x$ 拟合这组数据，那么参数 a_0,a_1 满足的法方程是_____。

9. $n=2$ 的牛顿——科茨求积公式中，科茨系数 $C_0^{(2)}=\dfrac{1}{6}$，$C^{(2)}\backslash -1=\dfrac{2}{3}$，那末 $C_2^{(2)}=$

_____。

10. 设 $y=f(x)$在 x_k,x_{k+1}处函数值为 y_k,y_{k+1}，$f(x)$的线性和值函数 $P_1(x)=\dfrac{x_{k+1}-x_k}{x_{k+1}-x_k}y_k$

$+\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}y_{k+1}$，取 $k=x_{k+1}-x_k$，用 $p_1'(x)\approx f'(x)(x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}$，那么 $f'(x_k)\approx$

_____$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$

得　分	评卷人

三、计算题(每小题 15 分,共 60 分)

11. 取初始值(0.3000,1.5600,2.6840),用高斯——赛德尔迭代法计算线性方程组

$$\begin{cases} 10x_1-2x_2-x_3=3 \\ -2x_1+10x_2-x_3=15 \\ -x_1-2x_2+5x_3=10 \end{cases}$$

求出迭代 2 次的结果,要求写出迭代格式,计算过程中取 5 位有效数字。

12. 已知函数 $y=f(x)$ 的函数值 $f(2.0)=1.414214$，$f(2.1)=1.449138$，$f(2.2)=1.483240$，$f(2.3)=1.516575$，试用这4个节点构造 $f(x)$ 的牛顿插值多项式 $N_3(x)$，并求 $f(2.15)$ 的值。

· 449[redacted]牛顿法计算 $\sqrt{135.607}$的近似值。计算过程保留 3 位小数。

式 $N_n($[redacted]

14. 用欧拉法求初值问题

$$\begin{cases} y' = -2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

在 $x=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ 处的近似值。计算过程保留 4 位小数。

得　分	评卷人

四、证明题(本题 10 分)

15. 已知函数 $y=f(x)$ 在点 $x_k=a+hk, y_k=f(x_k), k=0,1,2, h=\frac{b-a}{2}$ 的插值多项式为

$$f(x)\approx P_2(x)-\sum_{k=0}^{2}y_k l_k(x)$$

其中 $l_k(x)(k=0,1,2)$ 是插值基函数。试证明：$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的插值型求积公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{3}[f(a)+4f(x_1)+f(b)]$$

号:1012

播电视大学 2000—2001 学年度第一学期"开放教育(本科)"期末考试

计算机科学与技术专业计算机数学基础(2)

试题答案及评分标准

(供参考)

2001 年 1 月

一、选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. C　　2. A　　3. D　　4. C　　5. B

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

6. $\frac{1}{2\times 3}\times 10^{-5+1}=\frac{1}{6}\times 10^{-4}$

7. $a_{kk}^{(k-1)}\neq 0(k=1,2,\cdots,n-1)$或系数矩阵 A 的各阶顺序主子式不为 0

8. $\begin{cases}3a_0+6a_1=10\\6a_0+14a_1=23\end{cases}$

9. $\frac{1}{6}$

10. $\frac{1}{h}[f(x_{k+1})-f(x_k)]$

三、计算题(每小题 15 分,共 60 分)

11. 解　迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=0.2x_2^{(k)}+0.1x_3^{(k)}+0.3\\x_2^{(k+1)}=0.2x_1^{(k+1)}+0.1x_3^{(k)}+1.5\\x_3^{(k+1)}=0.2x_1^{(k+1)}+0.4x_2^{(k+1)}+2\end{cases}$$ (5 分)

从初始值(0.3000,1.5600,2.6840)开始迭代。

当 $k=0$,得到

$$\begin{cases}x_1^{(1)}=0.2\times 1.5600+0.1\times 2.6840+0.3=0.8804\\x_2^{(1)}=0.2\times 0.8804+0.1\times 2.6840+1.5=1.9445\\x_3^{(1)}=0.2\times 0.8804+0.4\times 1.9445+2=2.9539\end{cases}$$ (10 分)

(4分)当 $k=1$,得到

$$\begin{cases} x_1^{(2)}=0.2\times1.9445+0.1\times2.9539+0.3=0.9843 \\ x_2^{(2)}=0.2\times0.9843+0.1\times1.9445+1.5=1.8913 \\ x_3^{(2)}=0.2\times0.9843+0.4\times1.8913+2=2.9543 \end{cases}$$

所求结果为(0.9843,1.893,2.9543)　　(15分)

12. 解　计算各阶均差,如表

k	x_k	$y_k=f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
0	2.0	1.414214			
1	2.1	1.449138	0.34924		
2	2.2	1.483240	0.34102	−0.041100	
3	2.3	1.516575	0.33335	−0.038350	0.009167

(8分)

(12分)

$$N_3(x)=1.414214+0.34924(x-2)-0.0411(x-2)(x-2.1)$$
$$+0.009167(x-2)(x-2.1)(x-2.2)$$

$f(2.15)\approx N_3(2.15)=1.466288$　　(15分)

13. 解　设 $x=\sqrt{c}$,有 $f(x)=x^2-c$。求 $f(x)=0$ 的正根。用牛顿法,公式是

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^2-c}{2x_n}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{c}{x_n}\right)\quad(*)$$

(5分)

当 $c=135.607$ 时,12 是最接近 $\sqrt{135.607}$ 的整数,且 $f'(12)=24$,$f(12)f''(12)>0$,故取 $x_0=12$,用迭代公式(*),有　　(8分)

$$x_1=\frac{1}{2}\left(12+\frac{135.607}{12}\right)=11.650$$

$$x_2=\frac{1}{2}\left(11.650+\frac{135.607}{11.650}\right)=11.645$$

$$x_3=\frac{1}{2}\left(11.645+\frac{135.607}{11.645}\right)=11.645$$

取 $\sqrt{135.607}\approx11.645$　　(15分)

14. 解　因为 $f(x,y)=-2xy, x_0=0, y_0=1, h=0.2$,　　(4 分)

用欧拉法的迭代公式为

$y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)=y_k-0.2\times 2x_k y_k=y_k(1-0.4x_k^2)$　　(8 分)

将 $x_1=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ 代入上迭代公式，于是得到

当 $x_1=0.2$ 时，$y(0.2)\approx y_1=y_0(1-0.4x_0)=1\times(1-0.4\times 0)=1.0000$

当 $x_2=0.4$ 时，$y(0.4)\approx y_2=y_1(1-0.4x_1)=1\times(1-0.4\times 0.2)=0.9200$

当 $x_3=0.6$ 时，$y(0.6)\approx y_3=y_2(1-0.4x_2)=0.92\times(1-0.4\times 0.4)=0.7728$

当 $x_4=0.8$ 时，$y(0.8)\approx y_4=y_3(1-0.4x_3)=0.7728\times(1-0.4\times 0.6)=0.5873$

当 $x_5=1.0$ 时，$y(1.0)\approx y_5=y_4(1-0.4x_4)=0.5873\times(1-0.4\times 0.8)=0.3994$　　(15 分)

四、证明题(本题 10 分)

15. 证明　函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的插值型求积公式，是用 $f(x)$ 的拉格朗日插值多项式近似而得到的积分公式。即

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\int_a^b P_2(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{2}y_k\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x$　　(4 分)

$\int_a^b l_0(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{(x-x_1)(x-b)}{(a-x_1)(a-b)}\mathrm{d}x\xrightarrow{令\ x=a+ht}\int_0^2\frac{(t-1)(t-2)}{2}h\mathrm{d}t=\frac{h}{3}$

$\int_a^b l_1(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{(x-a)(x-b)}{(x_1-a)(x_1-b)}\mathrm{d}x\xrightarrow{令\ x=a+ht}\int_0^2\frac{t(t-2)}{-1}h\mathrm{d}t=\frac{4h}{3}$

$\int_a^b l_2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{(x-a)(x-x_1)}{(b-a)(b-x_1)}\mathrm{d}x\xrightarrow{令\ x=a+ht}\int_0^2\frac{t(t-1)}{2}h\mathrm{d}t=\frac{h}{3}$　　(8 分)

所以，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{2}y_k\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x=\frac{h}{3}[y_0+4y_1+y_2]$。证毕。　　(10 分)