试卷代号:1012　　座位号□□

中央广播电视大学2001—2002学年度第一学期“开放本科”期末考试

计算机专业计算机数学基础(2)试题

2002年1月

题　号	一	二	三	四	总　分
分　数					

得　分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 数 $a^*=0.69314718\cdots$ 的有四位有效数字的近似值是(　　)

(A)0 69314　　(B)0.6930

(C)0 6932　　(D)0.69315

2. 设线性方程组 $X=BX+f$,n 阶矩阵 B 的特征根为 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$,对任意初始向量 $X^{(0)}$ 及 f,对应此方程组的迭代格式

$$X^{(k+1)}=BX^{(k)}+f,k=1,2,\cdots$$

都收敛的充分必要条件是(　　)

(A) $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|<1$　　(B) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i<1$

(C) $\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|<1$　　(D) $\min_{1\le i\le n}|\lambda_i|<1$

3. 已知函数 $y=f(x)$ 在5个互异节点处的函数值,其一阶、二阶均差均不为0,三阶均差是1,那么用这5对数值作的插值多项式 $P(x)$ 是(　　)

(A)五次多项式　　(B)四次多项式

(C)三次多项式　　(D)二次多项式

4. 已知当 $x=1,2$ 时的函数值 $f(1)$,$f(2)$,则 $f'(1)\approx$(　　)

(A) $f(1)-f(2)$　　(B) $f(2)-f(1)$

(C) $\frac{1}{2}[f(1)+f(2)]$　　(D) $\frac{1}{2}[f(2)-f(1)]$

5. 解常微分方程初值问题的欧拉法的局部截断误差是(　　)

(A) $O(h^5)$　　(B) $O(h^4)$

(C) $O(h^3)$　　(D) $O(h^2)$

得　分	评卷人

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. 近似值2 15 的相对误差限不大于_____,则它至少有三位有效数字。

7　用高斯—赛德尔迭代法解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

的迭代格式中 $x_2^{(k+1)} =$ _____ $(k = 0,1,2,\cdots)$

8. 用列主元消去法解线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 0 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$,在做第1次消元之前,选择主元为_____。

9　用梯形求积公式计算积分 $\int_1^2 x^2 \mathrm{d}x \approx$ _____。

10. 已知当 $n = 4$ 时,科茨系数为 $C_0^{(4)} = C_4^{(4)} = \frac{7}{90}, C_1^{(4)} = C_3^{(4)} = \frac{32}{90}, C_2^{(4)} = \frac{12}{90}$,等分区间 $[a,b]$,分点为 $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$,那么科茨求积公式是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \text{_____}。$$

得　分	评卷人

三、计算题(每小题 15 分,共 60 分)

11. 用雅可比迭代法解线性方程组

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

从初始值$(0,0,0)^T$开始,计算出第 3 次迭代结果,并要求写出迭代公式,计算过程中保留 4 位小数。

12　设函数值表为

x	1	3	4	6
y	-7	5	8	14

试求拉格朗日插值多项式(要求合并同类项,整理成一个多项式)。

13. 用迭代法求方程 $2x - \lg x = 7$ 的近似根,所求近似根满足$|2x - \lg x - 7| < 0\ 005$,计算过程中保留 3 位小数。

14　用改进的欧拉法平均形式公式,取步长 $h = 0\ 2$,求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -2xy(0 \leq x \leq 0.4) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

计算过程中保留 4 位小数。

得　分	评卷人

四、证明题(本题 10 分)

15. 已知勒让德多项式 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n}$,证明两点($n=2$)的高斯—勒让德求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

试卷代号:1012

中央广播电视大学2001—2002学年度第一学期“开放本科”期末考试

计算机专业计算机数学基础(2)

试题答案及评分标准

(供参考)

2002年1月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. A　　2 C　　3 C　　4. B　　5 D

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. $\frac{1}{2\times3}\times10^{-2}$

7. $3-x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)}$

8. -4

9. $\frac{5}{2}$

10. $(b-a)[\frac{7}{90}f(a)+\frac{32}{90}f(x_1)+\frac{12}{90}f(x_2)+\frac{32}{90}f(x_3)+\frac{7}{90}f(b)]$

三、计算题(每小题15分,共60分)

11 解　迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=0\ 2x_2^{(k)}+0\ 1x_3^{(k)}+0\ 3 \\ x_2^{(k+1)}=0\ 2x_1^{(k)}+0\ 1x_3^{(k)}+1\ 5 \\ x_3^{(k+1)}=0\ 2x_1^{(k)}+0.4x_2^{(k)}+2 \end{cases} \quad (k=0,1,2) \qquad (5\text{分})$$

当$k=0$时,$X^{(0)}=(0,0,0)^T$,易得$X^{(1)}=(0.3000,1.5000,2\ 0000)$　　(7分)

当$k=1$时,$X^{(1)}=(0.3000,1.5000,2.0000)$

$$\begin{cases} x_1^{(2)}=0.2\times1.5+0\ 1\times2+0\ 3=0\ 8000 \\ x_2^{(2)}=0.2\times0.3+0.1\times2+1.5=1\ 7600 \\ x_3^{(2)}=0.2\times0\ 3+0.4\times1.5+2=2\ 6600 \end{cases} \qquad (12\text{分})$$

当 $k=2$ 时，$X^{(2)}=(0\ 8000,1.7600,2.6600)$

$$\begin{cases} x_1^{(3)}=0.2\times1\ 76+0.1\times2.66+0.3=0.9180 \\ x_2^{(3)}=0.2\times0\ 8+0.1\times2\ 66+1.5=1.9260 \\ x_3^{(3)}=0.2\times0.8+0\ 4\times1.76+2=2.8640 \end{cases}$$ （15 分）

12. 解　插值基函数分别为

$$l_0(x)=\frac{(x-3)(x-4)(x-6)}{(1-3)(1-4)(1-6)}=-\frac{1}{30}(x^3-13x^2+54x-72)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(3-1)(3-4)(3-6)}=\frac{1}{6}(x^3-11x^2+34x-24)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(4-1)(4-3)(4-6)}=-\frac{1}{6}(x^3-10x^2+27x-18)$$

$$l_3(x)=\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(6-1)(6-3)(6-4)}=\frac{1}{30}(x^3-8x^2+19x-12)$$ （9 分）

多项式为

$$P_3(x)=\frac{7}{30}(x^3-13x^2+54x-72)+\frac{5}{6}(x^3-11x^2+34x-24)$$
$$-\frac{8}{6}(x^3-10x^2+27x-18)+\frac{14}{30}(x^3-8x^2+19x-12)$$

$$=\frac{1}{5}(x^3-13x^2+69x-92)$$ （15 分）

13　解　记 $f(x)=2x-\lg x-7$。可以得到

$f(3.5)<0, f(4)>0$，取有根区间为 $[3.5,4]$ （4 分）

建立迭代公式

$$x=\frac{1}{2}(\lg x+7)=\varphi(x)$$ （7 分）

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2\ln10}\cdot\frac{1}{x},\ \max_{3\ 5\le x\le4}|\varphi'(x)|\le\frac{1}{2\times3.5\ln10}<1$$ （9 分）

取初始值 $x_0=3.5$ 进行迭代，

$$x_1=\frac{1}{2}(\lg3.5+7)=3.772,\ |f(3.772)|\approx0\ 03$$

$$x_2=\frac{1}{2}(\lg3.772+7)=3.788,\ |f(3.778)|\approx0.002$$

$x \approx 3.788$ 是满足要求的近似根。 (15 分)

注:取初始值为 4,第 2 次迭代值为 3 790 满足要求。近似值 x 满足 $3.787 \leq x \leq 3\ 790$,均为满足要求的解。

14 解 改进欧拉法的平均形式的公式为

$$\begin{cases} y_p = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_c = y_k + hf(x_{k+1}, y_p) \quad k = 0,1 \\ y_{k+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$ (4 分)

$h = 0.2, f(x_k, y_k) = -2x_k y_k$

计算公式为

$$\begin{cases} y_p = y_k - 0\ 4x_k y_k \\ y_c = y_k + 0.4x_{k+1} y_p \\ y_{k+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$ (9 分)

当 $k = 0$ 时,$x_0 = 0, y_0 = 1, x_1 = 0.2$

$$\begin{cases} y_p = 1 - 0\ 4 \times 0 \times 1 = 1 \\ y_c = 1 - 0\ 4 \times 0\ 2 \times 1 = 0.92 \\ y_1 = \dfrac{1}{2}(1 + 0.92) = 0\ 96 \end{cases}$$ (12 分)

$y(0.2) \approx y_1 = 0\ 96$

当 $k = 1$ 时,$x_1 = 0.2, y_1 = 0\ 96, x_2 = 0.4$

$$\begin{cases} y_p = 0.96 - 0\ 4 \times 0\ 2 \times 0.96 = 0.8832 \\ y_c = 0.96 - 0.4 \times 0\ 4 \times 0.8832 = 0.8187 \\ y_1 = \dfrac{1}{2}(0.8832 + 0.8187) = 0\ 8510 \end{cases}$$ (15 分)

$y(0.4) \approx 0.8510$

四、证明题(本题 10 分)

15 证明 当 $n = 2$ 时,$P_2(x) = \dfrac{1}{8}\dfrac{d^2}{dx^2}[(x^2 - 1)^2] = \dfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$

令 $P_2(x) = 0$,得到 $x_{0,1} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,两个高斯点。 (4 分)

构造求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_0 f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + A_1 f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

由代数精度的定义，上式对 $f(x)=1, x$ 精确成立，有

$$\begin{cases} 2 = A_0 + A_1 \\ 0 = -A_0 \dfrac{1}{\sqrt{3}} + A_1 \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$ （9 分）

解得 $A_0 = A_1 = 1$，得到求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$ （10 分）