试卷代号:1087　　座位号□□

中央广播电视大学2001—2002学年度第一学期"开放本科"期末考试

数学与应用专业数学分析专题研究试题

2002年1月

题　号	一	二	三	四	总　分
分　数					

得　分	评卷人

一、填空题(每小题3分,共18分)

1 若$A\subset B, A\subset C$, 则A____$B\cap C$

2 若$A=\{甲, 乙\}$, 则$2^A=$_____

3 设$f: X\to Y$, 若$\forall x_1, x_2\in X, x_1\neq x_2$, 有$f(x_1)\neq f(x_2)$,则称$f$为从$X$到$Y$上的_____

4 含有_____的等式叫做函数方程

5 设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$, 则$f(\frac{\pi}{2})=$_____

6 设函数$f(x)$定义在开区间(a, b)内,对于$\forall x_1, x_2\in(a, b)$, $\forall\alpha\in(0, 1)$, 有$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\geqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$, 则称$f(x)$是$(a, b)$内的_____函数

得　分	评卷人

二、单项选择题(每小题3分,共18分)

1 设$f: X\to Y$, $\forall B\subset Y$, 有$B(\quad)f(f^{-1}(B))$

A $=$　　B $\neq$

C $\subset$　　D $\supset$

2 自然数集N,是(　　)

A 有限集　　B 可列集

C 不可列集　　D 空集

3 设$f(x)$定义在(a, b)上,$x_0 \in (a,b)$是$f(x)$的极小值点,则(　　)

A $f'(x_0)=0$

B $\forall x \in (a, b)$有$f(x) \geqslant f(x_0)$

C $\exists \delta>0$, 当$|x-x_0|<\delta$时,有$f(x) \geqslant f(x_0)$

D $f(x_0)=0$

4 设$P(x, y)$是二元函数,且$y=f(x)$使得$P(x, f(x)) \equiv 0$,则函数$f(x)$是(　　)

A 有理函数　　B 无理函数

C 代数函数　　D 超越函数

5 设$f(x)$是(a, b)内的严格上凸函数,则(　　)

A $f(x)$在(a, b)内必取到最大值

B $f(x)$在(a, b)内必取到最小值

C $f(x)$在(a,b)内有$f''(x)<0$

D 前三个结论都不对

6 $f(x)$在(a, b)内连续可导,且$\exists x_0 \in (a, b)$, 使得$f'(x_0)=0$, 则x_0是(　　)

A 稳定点

B 极值点

C 拐点

D 临界点

得　分	评卷人

三、计算题(每小题8分,共32分)

1 设$a_1>0$, $a_2>0$, $a_3>0$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+a_3^n}$

2 已知曲线$y=f(x)$经过点(2,3),且曲线上任意点的切线的斜率是该点横坐标的2倍,求$f(x)$

3 已知$x+2\sqrt{x-y}+4y=2$, 求$\dfrac{dy}{dx}$

4 已知$2f(2-x)+f(x)=3x+6$, 求$f(x)$

得　分	评卷人

四、证明题(每小题8分,共32分)

1　设$f(x)$定义在$\mathbf{R}$上,对于任意的x_1, x_2, 有

$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant(x_1-x_2)^2$, 则$f(x)$是常值函数

2　证明　(1)$A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$　　(4分)

(2)$(A-B)\cup(C-B)=(A\cup C)-B$　　(4分)

3　若函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续,且x_1, x_2, ·　, x_n皆属于$[a, b]$, 则至少存在一点$\xi\in[a, b]$, 使得$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+　\cdot+f(x_n)]$

4　设$x>0$, $y>0$, $x\neq y$, 证明$(x+y)\ln\frac{x+y}{2}<x\ln x+y\ln y$

试卷代号:1087

中央广播电视大学2001—2002学年度第一学期“开放本科”期末考试

数学与应用专业数学分析专题研究

试题答案及评分标准

(供参考)

2002年1月

一、填空题(每小题3分,共18分)

1 $\subset$

2 $\{\phi,\{甲\},\{乙\},\{甲,乙\}\}$

3 单射

4 未知函数

5 $f(\frac{\pi}{2})=1$

6 上凸

二、单项选择题(每小题3分,共18分)

1. D　　2 B　　3 C　　4 C　　5 D　　6 A

三、计算题(每小题8分,共32分)

1 解　因为 $\max\{a_1, a_2, a_3\} \leqslant \sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+a_3^n} \leqslant \sqrt[n]{3}\max\{a_1, a_2, a_3\}$,故有

$$\max\{a_1, a_2, a_3\} \leqslant \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+a_3^n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\max\{a_1, a_2, a_3\}$$　　5分

所以有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+a_3^n}=\max\{a_1, a_2, a_3\}$$　　8分

2 解　$\begin{cases}y'(x)=2x\\ y(2)=3\end{cases}$

由方程可得,$y=x^2+c$,由　$y(2)=3$ 得　$c=-1$,即　$y=x^2-1$　　8分

3 解　已知 $x+2\sqrt{x-y}+4y=2$,对两端关于 x 求导,得

$$1+\frac{1}{\sqrt{x-y}}(x-y'_x)+4y'_x=0$$　　4分

由 $y'_x=\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}-4}=\dfrac{\sqrt{x-y}+1}{1-4\sqrt{x-y}}$ 8分

4 解 已知 $2f(2-x)+f(x)=3x+6$ (1)

令 $2-x=t$, 即 $x=2-t$,得

$2f(x)+f(2-x)=12-3x$ (2)

(2) $\times 2-(1)$得

$4f(x)+2f(2-x)-2f(2-x)-f(x)=24-6x-3x-6$ 6分

即 $3f(x)=18-19x$, $f(x)=6-3x$ 8分

四、证明题(每小题8分,共32分)

1 证明:对于 $\forall x_1, x_2\in R$, 有

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\leqslant|x_1-x_2|$$

令 $x_2\to x_1$, 则得 $f'(x_1)=0$, 6分

由 x_1 的任意性知,$f(x)=c$ 8分

2 证明.用 C^C 表示 C 的补集,则

$(1)A-(B-C)=A-(B\cap C^C)=A\cap(B\cap C^C)^C=A\cap(B^C\cup C)$

$=(A\cap B^C)\cup(A\cap C)=(A-B)\cup(A\cap C)$ 4分

$(2)(A-B)\cup(C-B)=(A\cap B^C)\cup(C\cap B^C)$

$=(A\cup C)\cap B^C=(A\cup C)-B$ 8分

3 证明 已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有最大值 M 与最小值 m,从而有

$m\leqslant\dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\quad+f(x_n)]\leqslant M$ 4分

由介值定理,存在 $\xi\in[a, b]$, 使

$f(\xi)=\dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdot\quad+f(x_n)]$ 8分

4 设 $f(x)=x\ln x$, 对于 $x>0$, 有 $f'(x)=\ln x+1$, $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$, 即在 $(0,\infty)$ 内是严格下凸函数,故对于 $x>0$, $y>0$, $x\neq y$ 有

$f(\dfrac{x+y}{2})<\dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]$ 6分

代入得 $(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}<(x\ln x+y\ln y)$ 8分