试卷代号:2022　　座位号□□

中央广播电视大学2001—2002学年度第一学期"开放专科"期末考试

计算机专业高等数学(1)试题

2002年1月

题　号	一	二	三	四	五	总　分
分　数						

得　分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1　下列函数中(　　)是基本初等函数

A　$f(x)=(\ln 2)^x$　　B　$f(x)=2x$

C　$f(x)=x+2$　　D　$f(x)=x^2+x$

2　若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,且满足(　　)时,则(a,b)内存在一点ξ,使得$f(\xi)=0$

A.　$f(a)\cdot f(b)>0$　　B　$f(a)\cdot f(b)<0$

C　$f(a)=f(b)$　　D　$f(a)\neq f(b)$

3　设$y=\ln|x|$,则$y'=$(　　)

A　$-\dfrac{1}{|x|}$　　B　$\dfrac{1}{x}$

C　$-\dfrac{1}{x}$　　D　$\dfrac{1}{|x|}$

4.　设$f(x)$是$(-a,a)$上的连续偶函数,则$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=$(　　)

A　$\int_{0}^{a}f(x)\,dx$　　B　$\int_{-a}^{0}f(x)\,dx$

C　0　　D　$2\int_{-a}^{0}f(x)\,dx$

5 若两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 满足,$a_n \leq b_n(n=1,2,\quad)$,则结论(　　)成立

A $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散　　B $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

C $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散　　D $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

得　分	评卷人

二、填空题(每小题3分,共15分)

1 已知函数$f(x-1)=x^2+x-2$,则$f(1)=$_____

2 若函数$f(x)$在$x=x_0$处连续,且$f(x_0)=3$,则$\lim\limits_{x\to x_0}2f(x)=$_____

3 函数$f(x)=2x^2-12x+18$的单调增加区间是_____

4 $\int\frac{f'(\tan x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=$_____

5 微分方程$y''=x^2$的通解为_____

得　分	评卷人

三、计算题(每小题6分,本题共54分)

1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x}$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

3 设$y=\sqrt[5]{1-\sin^2 x}$,求y'

4 设$y=y(x)$是由方程$\ln\frac{y}{x}=\frac{x}{y^2}$确定的函数,求$y'$

5 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x}}$

6 $\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\mathrm{d}x$

7 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{5^n\cdot n^2}$的收敛半径

8 求微分方程$xy'+y=\sin x$满足$y(\pi)=0$的特解

9 求微分方程$y''+y'-2y=8\sin x$的通解

比较系数得$\begin{cases}-A-3B=8\\B-3A=0\end{cases}$，解得$A=-\frac{4}{5}$，$B=-\frac{12}{5}$，由此得原方程的通解

$$y=-\frac{4}{5}\cos x-\frac{12}{5}\sin x+c_1e^{-2x}+c_2e^{x}$$

其中c_1,c_2为任意常数 …… 6分

四、应用题(本题12分)

解:由$y=x^2$和$y=1$所围成的面积S为

$$S=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=2\int_{0}^{1}(1-x^2)\,dx=\frac{4}{3}$$

而由$y=x^2$和$y=c$所围成的面积S_c为

$$S_c=\int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}}(c-x^2)\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{c}}(c-x^2)\,dx=2\left(cx-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{\sqrt{c}}=\frac{4c\sqrt{c}}{3}$$

由$S_c=\frac{1}{2}S$得 $\frac{4c\sqrt{c}}{3}=\frac{2}{3}$

解出 $c=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ …… 12分

五、证明题(本题4分)

证明:对任意x,由奇函数的定义可知

$$f(-x)=-f(x)$$

上式两端求导,由复合函数求导法则得

左端$=f'(-x)(-x)'=-f'(-x)$

右端$=-f'(x)$

由此得 $f'(-x)=f'(x)$

即$f'(x)$是偶函数

证毕 …… 4分

由此得 $\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{xy}=\dfrac{y\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y}{y^3}$

整理后得 $\mathrm{d}y=\dfrac{xy+y^3}{xy^2+2x^2}\mathrm{d}x$

即 $y'=\dfrac{xy+y^3}{xy^2+2x^2}$ …… 6分

5 解:由换元积分法得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x}}=-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(1-3x)}{\sqrt{1-3x}}\xlongequal{1-3x=u}-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}=-\frac{2}{3}\sqrt{u}+C$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{1-3x}+C$$ …… 6分

6 解:由分部积分法得

$$\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4}$$ …… 6分

7 解:令 $x^2=y$,得幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{y^n}{5^n\cdot n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{5^{n+1}(n+1)^2}}{\dfrac{1}{5^n n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{5(n+1)^2}=\frac{1}{5}$$

可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{y^n}{5^n\cdot n^2}$ 的收敛半径为5,进一步可知原幂级数的收敛半径为 $\sqrt{5}$ …… 6分

8 解:用公式法

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{\sin x}{x}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int\sin x\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}\left[-\cos x+C\right]=-\frac{\cos x}{x}+\frac{C}{x}$$

将 $y(\pi)=0$ 代入上式得 $C=-1$,所求特解为

$$y=-\frac{1+\cos x}{x}$$ …… 6分

9 解:原方程对应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

特征根为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1$,故齐次方程的通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^{-2x}+c_2\mathrm{e}^{x}$$

其中 c_1,c_2 为任意常数 设原方程的一个特解为 $y^*=A\cos x+B\sin x$,代入原方程得

$$(B-3A)\cos x+(-A-3B)\sin x=8\sin x$$

试卷代号:2022

中央广播电视大学2001—2002学年度第一学期"开放专科"期末考试

计算机专业高等数学(1)试题答案及评分标准

(供参考)

2002年1月

一、单项选择题(每小题3分,本题共15分)

1 A　　2 B　　3 B　　4 D　　5 C

二、填空题(每小题3分,本题共15分)

1 4

2 6

3 $(3,+\infty)$

4 $f(\tan x)+C$

5 $y=\frac{1}{12}x^4+c_1x+c_2$

三、计算题(每小题6分,共54分)

1 解:$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{\sin2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin2x}\cdot\frac{\sin3x}{x\cos3x}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\cos3x}$

$=\frac{3}{2}\times\frac{1}{1}\times1\times\frac{1}{1}=\frac{3}{2}$. …… 6分

2 解:$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}}{\frac{1}{x}(x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=1$ …… 6分

3. 解:$y'=\frac{1}{5}(1-\sin^2x)^{-\frac{4}{5}}(1-\sin^2x)'$

$=-\frac{2\sin x}{5}(1-\sin^2x)^{-\frac{4}{5}}(\sin x)'=-\frac{\sin2x}{5\sqrt[5]{(1-\sin^2x)^4}}$ …… 6分

4. 解:等式两端求微分得

左端$=\mathrm{d}\left(\ln\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{\frac{y}{x}}\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x}{y}\cdot\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{xy}$

右端$=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y^2}\right)=\frac{y^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}(y^2)}{y^4}=\frac{y\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y}{y^3}$

得　分	评卷人

四、应用题(本题12分)

求值 c,使 $y=c$ 平分由 $y=x^2$ 和 $y=1$ 所围成的面积

得　分	评卷人

五、证明题(本题4分)

设 $f(x)$ 是可导的奇函数,试证 $f'(x)$ 是偶函数.