试卷代号:1012　　座位号□□

中央广播电视大学 2001—2002 学年度第二学期“开放本科”期末考试

计算机专业计算机数学基础(2)试题

2002 年 7 月

题　号	一	二	三	四	总　分
分　数					

得　分	评卷人

一、单项选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 数值 x^* 的近似值 $x=0.1215\times10^{-2}$,若满足 $|x-x^*|\leq$(　　),则称 x 有4 位有效数字.

A. $\frac{1}{2}\times10^{-3}$　　B. $\frac{1}{2}\times10^{-4}$

C. $\frac{1}{2}\times10^{-5}$　　D. $\frac{1}{2}\times10^{-6}$

2. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}10 & -2 & -1\\ -2 & 10 & -1\\ -1 & -2 & 5\end{bmatrix}$,那么以 A 为系数矩阵的线性方程组 $AX=b$ 的雅可比迭代矩阵为(　　).

A. $\begin{bmatrix}0 & 0.2 & 0.1\\ 0.2 & 0 & 0.1\\ 0.2 & 0.4 & 0\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}1 & 0.2 & 0.1\\ 0.2 & 1 & 0.1\\ 0.2 & 0.4 & 1\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}0 & -0.2 & -0.1\\ -0.2 & 0 & -0.1\\ -0.2 & -0.4 & 0\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$

3. 已知 $y=f(x)$ 的均差 $f(x_0,x_1,x_2)=\frac{14}{3}$, $f(x_1,x_2,x_3)=\frac{15}{3}$, $f(x_2,x_3,x_4)=\frac{91}{15}$, $f(x_0,x_2,x_3)=\frac{18}{3}$,那么均差 $f(x_4,x_2,x_3)=$(　　).

A. $\frac{15}{3}$　　B. $\frac{18}{3}$

C. $\frac{91}{15}$　　D. $\frac{14}{3}$

4. 已知 $n=4$ 时牛顿—科茨求积公式的科茨系数 $C_0^{(4)}=\frac{7}{90}, C_1^{(4)}=\frac{16}{45}, C_2^{(4)}=\frac{2}{15}$，那么 $C_3^{(4)}=$（　　）.

A. $\frac{7}{90}$　　B. $\frac{16}{45}$

C. $\frac{2}{15}$　　D. $1-\frac{7}{90}-\frac{16}{45}-\frac{2}{15}=\frac{39}{90}$

5. 用简单迭代法求方程的近似根，下列迭代格式不收敛的是（　　）.

A. $e^x-x-1=0$，$[1,1.5]$，令 $x_{k+1}=e^{x_k}-1$

B. $x^3-x^2-1=0$，$[1.4,1.5]$，令 $x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$

C. $x^3-x^2-1=0$，$[1.4,1.5]$，令 $x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$

D. $4-2^x=x$，$[1,2]$，令 $x_{k+1}=\log_2(4-x)$

得　分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

6. sin1 有 2 位有效数字的近似值 0.84 的相对误差限是_____.

7. 设矩阵 A 是对称正定矩阵，则用_____迭代法解线性方程组 $AX=b$，其迭代解数列一定收敛.

8. 已知 $f(1)=1, f(2)=3$，那么 $y=f(x)$ 以 $x=1,2$ 为节点的拉格朗日线性插值多项式为_____.

9. 用二次多项式 $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，其中 a_0, a_1, a_2 是待定参数，拟合点 (x_1,y_1)，$(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$. 那么参数 a_0, a_1, a_2 是使误差平方和_____取最小值的解.

10. 设求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$，若对_____的多项式积分公式精确成立，而至少有一个 $m+1$ 次多项式不成立，则称该求积公式具有 m 次代数精度.

得　分	评卷人

三、计算题(每小题 15 分,共 60 分)

11. 用列主元消去法解线性方程组$\begin{cases}12x_1-3x_2+3x_3=15\\-18x_1+3x_2-x_3=-15\\x_1+x_2+x_3=6\end{cases}$,计算过程保留 4 位小数.

12. 取 $m=4$，即 $n=8$，用复化抛物线求积公式计算积分 $\int_0^{1.2}\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$，计算过程保留4位小数.

13. 用牛顿法解方程 $x-e^{-x}=0$ 在 $x=0.5$ 附近的近似根，要求 $|x_{n+1}-x_n|<0.001$. 计算过程保留 5 位小数.

14. 取 $h=0.1$，用改进欧拉法预报—校正公式求初值问题 $\begin{cases} y'=1+x+y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$ 在 $x=0.1, 0.2$ 处的近似值. 计算过程保留 3 位小数.

得　分	评卷人

四、证明题(本题 10 分)

15. 已知函数表

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	−7	−4	5	26	65	128

求证由此构造的牛顿插值多项式的最高次幂的系数为 1.

试卷代号:1012

中央广播电视大学 2001—2002 学年度第二学期"开放本科"期末考试

计算机专业计算机数学基础(2)试题答案及评分标准

(供参考)

2002 年 7 月

一、单项选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. D　　2. A　　3. C　　4. B　　5. A

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

6. $\frac{1}{2\times 8}\times 10^{-2+1}=\frac{1}{16}\times 10^{-1}=0.00625$

7. 高斯—赛德尔

8. $2x-1$

9. $\sum_{k=1}^{n}(y_k-\varphi(x_k))^2$ 或 $\sum_{k=1}^{n}(y_k-a_0-a_1x_k-a_2x_k^2)^2$

10. 不超过 m 次

三、计算题(每小题 15 分,共 60 分)

11. $[A:B]=\begin{bmatrix}12 & -3 & 3 & 15\\ -18 & 3 & -1 & -15\\ 1 & 1 & 1 & 6\end{bmatrix}$ (选 $a_{21}=-18$ 为主元)　　(5 分)

$\xrightarrow{(r_1,r_2)}\begin{bmatrix}-18 & 3 & -1 & -15\\ 12 & -3 & 3 & 15\\ 1 & 1 & 1 & 6\end{bmatrix}$ (换行,消元)

$\xrightarrow[r_3+\frac{1}{18}r_1]{r_2+\frac{12}{18}r_1}\begin{bmatrix}-18 & 3 & -1 & -15\\ 0 & -1 & 2.3333 & 5\\ 0 & 1.1667 & 0.9444 & 5.1667\end{bmatrix}$ (选$a_{32}=1.1667$ 为主元,并换行消元)

$\xrightarrow[r_3+\frac{1}{1.1667}r_2]{(r_2,r_3)}\begin{bmatrix}-18 & 3 & -1 & -15\\ 0 & 1.1667 & 0.9444 & 5.1667\\ 0 & 0 & 3.1428 & 9.4285\end{bmatrix}$　　(10 分)

系数矩阵为上三角形矩阵,于是回代得解

$$x_3=\frac{9.4285}{3.1428}=3.0000$$

$$x_2=[5.1667-0.9444\times 3.0000]/1.1667=2.0000$$

$$x_1=[-15+3.0000-3\times 2.0000]/(-18)=1.0000$$

方程组的解为 $X\approx(1.0000,2.0000,3.0000)^T$ （15 分）

12. 解 $n=8,h=\frac{1.2-0}{8}=0.15,f(x)=\ln(1+x^2)$

计算列表

k	x_k	$f(x_k)=\ln(1+x_k^2)$		端点
		奇数号	偶数号	
0	0.00			0
1	0.15	0.0223		
2	0.30		0.0862	
3	0.45	0.1844		
4	0.60		0.3075	
5	0.75	0.4463		
6	0.90		0.5933	
7	1.05	0.7431		
8	1.20			0.8920
Σ		1.3961	0.9870	0.8920

（7 分）

代入抛物线求积公式

$$\int_0^{1.2}\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=\frac{h}{3}[f_0+f_8+4(f_1+f_3+f_5+f_7)+2(f_2+f_4+f_6)]$$

$$=\frac{0.15}{3}[0.8920+4\times 1.3961+2\times 0.987]=0.4225$$ （15 分）

13. 令 $f(x)=x-\mathrm{e}^{-x}$，取 $x_0=0.5$，则 $f(0.5)f''(0.5)=(0.5-\mathrm{e}^{-0.5})(-\mathrm{e}^{-0.5})=0.06461>0$，于是取初始值 $x_0=0.5$. （3 分）

牛顿迭代公式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n-\mathrm{e}^{-x_n}}{1+\mathrm{e}^{-x_n}}(n=0,1,2,\cdots)$$ （7 分）

$x_0=0.5$，

$$x_1=0.5-\frac{0.5-e^{-0.5}}{1+e^{-0.5}}=0.56631$$ (11 分)

$$|x_1-x_0|=0.06631$$

$$x_2=0.56631-\frac{0.56631-e^{-0.56631}}{1+e^{-0.56631}}=0.56714$$

$$|x_2-x_1|=0.00083<0.001$$

于是取 $x=0.56714$ 为方程的近似根. (15 分)

14. 预报—校正公式为

$$\begin{cases}\bar{y}_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)=y_k+h(1+x_k+y_k^2)\\ y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},\bar{y}_{k+1})]=y_k+\frac{h}{2}(2+x_k+y_k^2+x_{k+1}+\bar{y}_{k+1}^2)\end{cases}$$ (5 分)

$h=0.1, x_0=0, y_0=1, x_1=0.1$, 于是有

$$\begin{cases}\bar{y}_1=1+0.1(1+0+1^2)=1.2\\ y_1=1+\frac{0.1}{2}(2+0+1^2+0.1+1.2^2)=1.227\end{cases}$$ (10 分)

$h=0.1, x_1=0.1, y_1=1.227, x_2=0.2$, 于是有

$$\begin{cases}\bar{y}_2=1.227+0.1(1+0.1+1.227^2)=1.488\\ y_2=1.227+\frac{0.1}{2}(2+0.1+1.227^2+0.2+1.488^2)=1.528\end{cases}$$ (14 分)

所求为 $y(0.1)\approx y_1=1.227 \quad y(0.2)\approx y_2=1.528$ (15 分)

四、证明题(本题 10 分)

15. 作均差表

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
0	−7			
1	−4	3		
2	5	9	3	
3	26	21	6	1
4	65	39	9	1
5	128	63	12	1

(6 分)

因为三阶均差均为常数 1, 可见该函数表的牛顿插值多项式最高次幂为 3 次, (7 分)

且其系数为 1. (10 分)